大規模マルチエージェントシステムのシェア争いにおける最適制御点問題

○鈴木 智充（東京大学），津村 幸治（東京大学）

Optimal Control Points Problem in Share Competition on Large-scaled Multi-Agent Systems

∗T. Suzuki (The University of Tokyo), K. Tsumura (The University of Tokyo)

Abstract– In this paper, we deal with large-scaled multi-agent consensus systems in which some of agents are assumed to be controlled and consider a share competition problem between several players. We assume that each player can choice a set of controlled agents and input control signals in order to make the states of all the agents to its own desired reference state. The reference states of the players are assumed to be different each other, therefore a conflict occurs between the players. Then, a problem for each player is to choice an optimal set of controlled agents in order to make the states of all the agents close to its own reference state as possible. This is essentially a complex optimal combination problem, however, in this paper, we show that the approximated optimal choice can be given by considerably small calculations in a situation where the control inputs are enough small. This result gives a strategy to the players for the share competition and we discuss the relationship between the structure of networks and monopolistic/equally competitive share competitions.

Key Words: マルチエージェントシステム，ゲーム，コンセンサス問題

1　はじめに

近年，情報通信技術や情報化技術の発展により，多くの分野で大規模なネットワーク構造を有するシステムが扱われるようになり，それに対する研究も盛んに行われるようになった．工学の分野でも交通システム，電力ネットワーク，センサネットワークなど大規模な人工システムが扱われるようになっている．また，生物の群れ，遺伝子ネットワークなど，非人工システムに対してもネットワーク構造を持つシステムとしてモデル化することで，数学的な解析が行われている．

これらの問題に対しては制御理論の観点からも様々なアプローチがなされており，システムの構成単位をエージェントと呼んでマルチエージェントシステムとしてシステム全体の挙動を解析する手法は代表的な方法の一つである．マルチエージェントシステムに関する研究では，エージェント一つ一つが自律分散的にふるまい，システム全体の挙動を解析する研究が盛んに行われている．特に，全てのエージェントが同じ状態に収束するコンセンサス問題はその代表例である [3]．

その一つである先行研究 [1, 2] では，大規模マルチエージェントシステムにおけるコンセンサス問題において，部分的に観測・制御するとき，どのエージェントを観測・制御すると最適かという問題に対して解答を与えた．ただし，それらの先行研究における問題設定では，システムを所望の状態にしたい主体は一つであり，エージェントの状態を全て同一のものとすることを目的としていた．

一方，例えばソーシャルネットワークサービス (SNS) における広報やコンピュータの対ハッキング性能といった例では，システムを制御する主体は一つではない．すなわち，競合する主体がそれぞれ異なる制御入力を異なるエージェントに加え，異なる状態に収束させようとする．SNS 広報の例では，フォロー・フォロワー関係からなるネットワークから，競合する企業がそれぞれユーザーを選び，広報することでできるだけ自社のシェアを広げようとする (シェア争い)．このとき，企業はできるだけ広告費を減らしつつ最大の効果を得たい．

そこで本研究では複数の競合する主体がそれぞれ異なる目標値を持ち，システムからエージェントを選んで制御入力を加え，それぞれが目標値に近づけようとする状況を考える．その上で，それぞれの主体がどのように制御点とするエージェントを選べばできるだけ多くのエージェントの状態を自身の目標値に近づけられるか，という問題を扱い，最適な制御点の選び方を導出する．

本稿の構成は，以下の通りである．まず第 2 章で本論文の主結果を述べるための数学的準備を行う．第 3 章でマルチエージェントシステムでのシェア争いにおける最適制御点の選び方に関する主結果を述べ，またそれに従って導かれる，シェア争いのための戦略，それぞれのマルチエージェントシステムのネットワークが有するシェア争いの性質について議論する．第 4 章でまとめと今後の展望について述べる．

2　数学的準備

2.1　線形代数的グラフ理論

2.1.1　定義

グラフ $\mathcal{G}$ は，ノード (頂点) 集合 $\mathcal{V} := \{1, 2, \ldots, N\}$ と枝集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ を用いて，$\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ で定義される．

有向グラフにおいて，$(i, j) \in \mathcal{E}$ はノード i からノード j へ向かう枝を表す．さらに，ノード i に対して，その近傍集合 $\mathcal{N}_i$ を $\mathcal{N}_i := \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ で定める．枝 $(j, i) \in \mathcal{E}$ をノード j からノード i への情報の流れと

考えれば，$\mathcal{N}_i$ はノード i に情報を送るノードの集合である．また，ノード i へ入る枝の本数を入次数といい，$d_i := |\mathcal{N}_i|$ であらわす．

有向路とは，連続する枝の列 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots$ で定義される．有向グラフにおいて，任意のノード i, j において i から j への有向路が存在するとき，グラフ $\mathcal{G}$ は強連結であるという．

2.1.2 グラフ構造を表す行列

線形代数的グラフ理論では，グラフ構造を表現するための様々な行列が知られている．ここでは推移行列と正規化グラフラプラシアンを紹介する．[1]

グラフ $\mathcal{G}$ の推移行列 Π を次で定義する．

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} 1/d_i & \text{if}\, j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

このとき，Π は各行和が 1 であるような確率行列である．

全てのノードの入次数 d_i が 0 でないグラフ $\mathcal{G}$ に対して，正規化グラフラプラシアン $\tilde{L}$ を，以下のように定義する．

$$\tilde{L} := I - \Pi \tag{2}$$

従って，正規化グラフラプラシアンの成分による表示は，次のようになる．

$$\tilde{L}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if}\, i = j \\ -1/d_i & \text{if}\, j \in \mathcal{N}_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

以下では，このグラフに関して，次の仮定を置く．

仮定 1. グラフ $\mathcal{G}$ は強連結とする．また，自己ループはないものとする．

この仮定を置くことで，正規化グラフラプラシアンが定義できる．

2.1.3 Alt-PageRank

Alt-PageRank は，文献[1] で提唱された，ネットワークにおけるノードの制御の意味での重要性を表す指標である．ノード i の Alt-PageRank を p_i とし，それを並べたベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)^\top$ を Alt-PageRank ベクトルと呼び，$\boldsymbol{p}$ は次で定義される．

$$\boldsymbol{p}^\top = \boldsymbol{p}^\top \Pi$$

すなわち，推移行列 Π の固有値 1 に対する左固有ベクトルとして，Alt-PageRank ベクトル $\boldsymbol{p}$ を定義する．

この時，正規化グラフラプラシアンによって Alt-PageRank は定義と同値な次の関係を得る．

$$\boldsymbol{p}^\top \tilde{L} = \boldsymbol{0}^\top \tag{4}$$

Alt-PageRank は強連結かつ推移行列 Π が非周期的なグラフに対しては定数倍を除いて一意であり，以下では成分の総和を 1 と規格化する．

次に，推移行列 Π のような非負行列に関する定理について述べる．

定理 2 (Perron-Frobenius の定理[4])**.** 非負の正方行列 A について，次が成立する．

- A は非負の固有値を持つ．このうち最大のものを α とすると，α に対する非負固有ベクトルが存在する．この α をフロベニウス根という．
- A のほかの固有値の絶対値は α を超えない．
- $A^\top$ のフロベニウス根は A のフロベニウス根と等しい．

2.2 線形代数に関する諸定理

ここでは行列の固有値の評価に関する以下の定理を紹介する．

定理 3 (Gershgorin の定理[5])**.** N 次正方行列 A に対して，複素平面上の領域 D_i を

$$D_i := \{z \in \mathbb{C} | |z - A_{ii}| \le \sum_{i \ne j} A_{ij}\} \tag{5}$$

として定義する．ただし，A_{ij} は A の (i, j) 成分である．このとき，行列 A の固有値の集合 $\sigma(A)$ の存在しうる範囲は，以下のように評価できる．

$$\sigma(A) \subset \cup_{i=1}^{N} D_i \tag{6}$$

また，これらの D_i ひとつひとつを以下では Gershgorin disk と呼ぶことにする．

3 マルチエージェントシステムにおけるシェア争い

3.1 コンセンサス問題

本稿においては，コンセンサス問題を以下の形式で定義する．

$$\dot{x}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j - x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

これは，各エージェントがダイナミクスとして積分器を有しているものである．この連立微分方程式は，式 (2) の正規化グラフラプラシアン $\tilde{L}$ を用いて，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\tilde{L}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

と書き直すことができる．

3.2 Weakly Controlled System

先行研究[1] では，自律分散システムを制御する機構として，Weakly Controlled System (以下 WCS) と呼ばれるシステムを提案している．これは，前節のコンセンサス問題において，ある k 番目のエージェントにのみ一定値の参照信号 r を入れる状況になっている．

$$\dot{x}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j - x_i), \quad (\forall i \ne k) \tag{9}$$

$$\dot{x}_k = \frac{1}{d_k} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j - x_k) + \varepsilon(r - x_k) \tag{10}$$

ただし，ε は正の定数で，$0 < \varepsilon \ll 1$ を満たし，制御ゲインを表す．すなわち，このシステムを制御する主体は，システムに対して弱い制御しかできない．このシステムは，状態変数 x_i を並べたベクトル $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^\top \tag{11}$$

を用いて，以下のように書き換えられる．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\tilde{L}_k \boldsymbol{x} + \varepsilon r \boldsymbol{e}_k \tag{12}$$

ただし $\tilde{L}_k = \tilde{L} + \varepsilon \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_k^\top$，$\boldsymbol{e}_k \in \mathbb{R}^N$ は第 k 成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルである．このシステムの平衡点は $\boldsymbol{x}^* = r\boldsymbol{1}$ であり，システムは必ず平衡状態 $\boldsymbol{x}^*$ に収束する．

命題 4. システム (12) の収束速度が最も速くなるのは，制御点 k として，ネットワークの正規化グラフラプラシアン $\tilde{L}$ の Alt-PageRank ベクトルの成分が最大のノードを選んだ場合である [1]．

3.3　問題設定

先行研究では前述のマルチエージェントシステムを制御しようとする主体は一つで，その目標値に収束するようにエージェントに制御入力を加えた．一方本研究では複数の主体がそれぞれ異なる目標値を持ち，それぞれが制御入力を加えるエージェントを選ぶ．この状況で，各主体はできるだけ多くのエージェントの状態を自分の目標値にできるだけ近づけようとする．以降，本システムを制御しようとする主体のことを「チーム」と呼ぶことにする．

チーム数を M とする．また，チームごとの目標値を区別するため，第 i エージェントの状態を M 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_i = [x_{i1}\ x_{i2}\ \cdots\ x_{iM}]^\top$ とする．また，第 m チームの持つ目標値をそれぞれ $\boldsymbol{r}_m = \boldsymbol{e}_m \in \mathbb{R}^M$ とすると，x_{im} は第 m チームの第 i エージェントへの影響の寄与分と考えることができる．

収束後の各ノードの状態がどのチームの目標値に近いかは，ノードの状態変数の最大成分で判断することにする．すなわち，ノード i の状態ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ について，その成分の最大値が第 m 成分であるとき，そのエージェントは第 m チームに属すると考えることにする．

このとき，Weakly Controlled System (9)(10) における状態変数および目標値をベクトルに自然に拡張することによって，計 NM 個の変数を縦に並べたベクトル $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^\top\ \boldsymbol{x}_2^\top\ \cdots\ \boldsymbol{x}_M^\top]^\top$ に関する状態方程式が立式できるが，これは各 $\boldsymbol{x}_i$ の第 m 成分だけを並べたベクトル $\boldsymbol{x}^{(m)} = [x_{1m}\ x_{2m}\ \cdots\ x_{nm}]^\top$ に関する計 M 本の次の状態方程式に分離できる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}^{(m)} = -\tilde{L}_{\text{in}} \boldsymbol{x}^{(m)} + \varepsilon_m \boldsymbol{r}^{(m)} \quad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{13}$$

ただし

$$\tilde{L}_{\text{in}} = \tilde{L} + \sum_{m=1}^{M} \sum_{j \in \mathcal{I}_m} \varepsilon \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j^\top \tag{14}$$

であり，$\mathcal{I}_m$ を第 m チームの制御点の集合として $\boldsymbol{r}^{(m)}$ は第 m チームが第 i エージェントに入力を加えるなら $r_i^{(m)} = 1$，そうでないなら $r_i^{(m)} = 0$ のベクトルである．また，ε_m は第 m チームの制御ゲインであり，$0 < \varepsilon \ll 1$ を満たす．

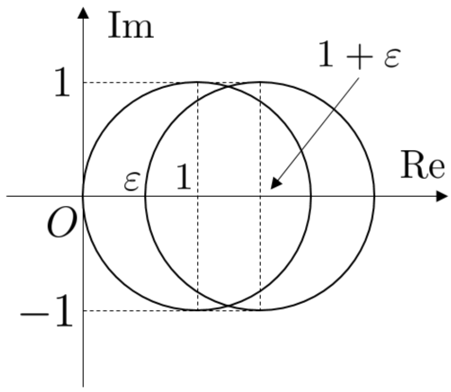

Fig. 1: $\tilde{L}_{\text{in}}$ の Gershgorin disk．特に $\forall m, \varepsilon_m = \varepsilon$ の場合．

以下ではまず，上で定式化された系が初期値によらず収束することを示す．すなわち，必ず何らかの合意状態を達成することを示す．

次が成り立つ．

補題 5. 状態方程式の係数行列 $-\tilde{L}_{\text{in}}$ の固有値は全て実部が負である．

Proof. $\tilde{L}_{\text{in}}$ の全ての固有値の実部が正であることを示す．そのために，次の 2 ステップに分けて証明する : (I) $\tilde{L}_{\text{in}}$ の固有値の実部は非負である．また，実部が 0 の固有値があるならその固有値は 0 である．(II) $\tilde{L}_{\text{in}}$ は 0 を固有値に持たない．

(I) について，これは Gershgorin の定理より直ちに従う．実際，$\tilde{L}_{\text{in}}$ の第 i Gershgorin disk D_i は，第 i エージェントにいずれのチームからの入力もない場合 $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \le 1\}$ となり，第 i エージェントに第 m チームからの入力がある場合 $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (1 + \varepsilon_m)| \le 1\}$ である．従ってこれらの和集合 $\cup_{i=1}^{N} D_i$ は，Fig. 1 のように原点で虚軸に接する右半平面上の閉領域である．したがって，$\tilde{L}_{\text{in}}$ の固有値は実部が非負であり，もし実部が 0 のものが存在するならばその固有値は 0 である．

次に (II) を背理法で示す．$\tilde{L}_{\text{in}}$ に 0 固有値が存在すると仮定し，その右固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とおくと，$\tilde{L}_{\text{in}} \boldsymbol{u} = 0$ である．ここで，$\tilde{L}_{\text{in}} = \tilde{L} + \sum_{m=1}^{M} \sum_{j \in \mathcal{I}_m} \varepsilon_m \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j^\top$ について，右辺第 2 項を E_{in} とおく．すなわち，$E_{\text{in}} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j \in \mathcal{I}_m} \varepsilon_m \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j^\top$ とおくと，$\tilde{L}_{\text{in}} = \tilde{L} + E_{\text{in}}$ である．さらに，$\tilde{L}$ の 0 固有値に対応する左固有ベクトル (Alt-PageRank ベクトル) を $\boldsymbol{p}$ とおくと，$\boldsymbol{p}^\top \tilde{L} = \boldsymbol{0}^\top$ である．$\boldsymbol{p}$ の成分はすべて正である．ここで $\boldsymbol{p}^\top \tilde{L}_{\text{in}} \boldsymbol{u} = 0$ から，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^\top \tilde{L}_{\text{in}} \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{p}^\top (\tilde{L} + E_{\text{in}}) \boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{p}^\top E_{\text{in}} \boldsymbol{u} \\ &= \sum_{i \in \cup \mathcal{I}_m} \varepsilon_m p_i u_i = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

ここで $\forall m, \varepsilon_m$ と $\forall i, p_i$ は正の値を取るため，(15) を満たす $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するためには，u_i の中には必ず符号の異なるものが存在する．

一方で

$$\tilde{L}_{\text{in}}\boldsymbol{u} = (I - \Pi + E_{\text{in}})\boldsymbol{u} = 0 \tag{16}$$

より

$$(I + E_{\text{in}})^{-1}\Pi\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \tag{17}$$

であることから，$\Pi' := (I + E_{\text{in}})^{-1}\Pi$ は固有値 1 を持ち，かつその固有ベクトルは $\boldsymbol{u}$ である．Π の Gershgorin disk は全て $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$，すなわち原点中心で半径 1 の円盤である．$\Pi'$ は Π と比べて第 $i \in \cup_m \mathcal{I}_m$ 行が $(a + \varepsilon_m)^{-1}$ 倍されている行列であるため，Π' の第 i Gershgorin disk は，第 i エージェントにいずれかのチームからの入力がなければ Π の第 i Gershgorin disk と変わらず，第 i エージェントに第 m チームからの入力があれば $\{z \in \mathbb{C} | |z| \leq (1+\varepsilon_m)^{-1}\}$，すなわち中心が原点で半径が $(1 + \varepsilon_m)^{-1}(< 1)$ に縮小したものになっている．従って Gershgorin の定理によって評価できる固有値の存在しうる範囲は，Π，Π' もともに原点中心の単位円である．従って，Π' の 1 以外の全ての固有値の大きさは 1 を超えず，これより固有値 1 は Π' のフロベニウス根である．よって，定理 2 により，非負行列 Π' のフロベニウス根 1 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分は非負である．これは，先の議論と矛盾する．以上より，$\tilde{L}_{\text{in}}$ は 0 を固有値に持たない． □

次に，以下の仮定を置く．

仮定 6. 各チームの制御ゲインはすべて等しいとする．すなわち，$\forall m, \varepsilon_m = \varepsilon$ とする．

この仮定は，全てのチームがネットワークに対して平等の影響力を持っていることを表す．補題 5 により，システムは必ず唯一の平衡点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)} = \varepsilon\tilde{L}_{\text{in}}^{-1}\boldsymbol{r}^{(m)}$ に収束する．各チームは $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)}$ の成分をできるだけ大きくするため，制御点とするエージェントをうまく選びたい．この問題について，以下の結果を得た．

定理 7. 各チームが制御点を 1 点ずつ選べるとする．各チームが制御点として選ぶべきエージェントは，Alt-PageRank ベクトルの最大成分に対応するエージェントである．

Proof. システムの平衡点 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ は，

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)} = \varepsilon\,\tilde{L}_{\text{in}}^{-1}\boldsymbol{r}^{(m)} = \varepsilon\det(\tilde{L}_{\text{in}})^{-1}\text{adj}(\tilde{L}_{\text{in}})\boldsymbol{r}^{(m)} \tag{18}$$

で表される．ここで $\text{adj}(\tilde{L}_{\text{in}})$ は $\tilde{L}_{\text{in}}$ の余因子行列である．今，各チームは制御点を 1 点ずつ選ぶから，$\tilde{L}_{\text{in}}$ は対角成分に M 個の ε を持つ．従って，$\text{adj}(\tilde{L})_{\text{in}}$ の成分は，全て ε についての高々M 次多項式である．ここで $0 < \varepsilon \ll 1$ から，$\text{adj}(\tilde{L}_{\text{in}})$ は各多項式の定数項からなる行列，すなわち $\text{adj}(\tilde{L}_{\text{in}})|_{\varepsilon=0} = \text{adj}(\tilde{L})$ が支配的となる．したがって，値の大きい $\text{adj}(\tilde{L})$ に対応する行の $\boldsymbol{r}^{(m)}$ の成分が 1 であれば，第 m チームの寄与分に関する平衡点 $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(m)}$ の値が大きくなる．

ここで，正方行列とその余因子行列の関係から，$\det(\tilde{L}) = 0$ に注意して，

$$\text{adj}(\tilde{L}) \cdot \tilde{L} = O \tag{19}$$

$$\tilde{L} \cdot \text{adj}(\tilde{L}) = O \tag{20}$$

が成り立つ．これより，$[\text{adj}(\tilde{L})]|_{k,:} \cdot \tilde{L} = \boldsymbol{0}^\top\ (\forall k)$ である．ただし，行列 A に対して $[A]|_{k,:}$ とは，A の第 k 行を取り出した横ベクトルを表す．これは，$\text{adj}(\tilde{L})$ の行は $\tilde{L}$ の Alt-PageRank ベクトルの定数倍であることに他ならない．また，同様に $\tilde{L} \cdot [\text{adj}(\tilde{L})]|_{:,k}\ (\forall k)$ を考えることで，$[\text{adj}(\tilde{L})]|_{:,k}$ は $\boldsymbol{1}$ の定数倍であることが分かる．$\text{adj}(\tilde{L})$ は Alt-PageRank ベクトルの転置 $\boldsymbol{p}^\top$ が縦に N 本並んだ行列の定数倍になっている．したがって，その成分が最大のエージェントを制御点とすることで最適な制御点を選ぶことができる． □

定理 7 の導出から，同様に次を得る．

定理 8. 各チームが制御点を複数点選ぶことができるとする．このとき，各チームは，Alt-PageRank が最大の方から対応するエージェントを選び制御点とするのが最適である．

Proof. 定理 7 で考慮した条件下では，$\boldsymbol{r}^{(m)}$ の成分が一つだけ 1 で他は 0 であったが，ここでは制御点として選べるエージェントの個数と同じ数の 1 と，それ以外は 0 が並ぶ．この時，式 (18) における平衡点 $\boldsymbol{x}^*$ の ε に関する定数項は $\text{adj}(\tilde{L})$ のいくつかの列の和であることより，Alt-PageRank の値が最大のものから降順に選べるエージェント数までの要素を選ぶように，$\boldsymbol{r}^{(m)}$ の成分に要素 1 を並べればよい． □

この定理によって，最適な制御点の選択を少ない計算量で決定できる．原理的には単純な手法として競合チームと自分のチームの選択の組み合わせの分だけ総当たりで平衡点を計算し，その中で最も有利と考えられるノードを選択することにより最適解が得られる．しかし総当たりの手法の計算量は極めて大きく，現実的ではない．それに対し本定理によれば，$\tilde{L}$ の 0 固有値に対する左固有ベクトルのみを計算し，最大成分に対応するノードを選べば解が得られる．たとえば各チームが制御点を 1 点ずつ選べる状況を考えると，前者では全チームの制御点の選択の組に対して平衡点の計算に必要な計算量は $\mathcal{O}(N^3)$ であるから，全ての制御点の組み合わせに対しては ${}_N C_M \mathcal{O}(N^3)$ だけ必要である．一方で，定理を用いた後者の計算方法では，固有ベクトルの計算だけが必要なので $\mathcal{O}(N^3)$ である．ネットワークが大規模になるにつれ，定理を用いることで計算量を減らすことができる．各チームが制御点を選ぶ個数として複数個を許せば，その効果はより顕著に現れる．

また，以上の定理により，仮に敵対するチームが既にいくつかのノードを制御点として選んでいるときでも，それらの Alt-PageRank の値の総和を超えるよう

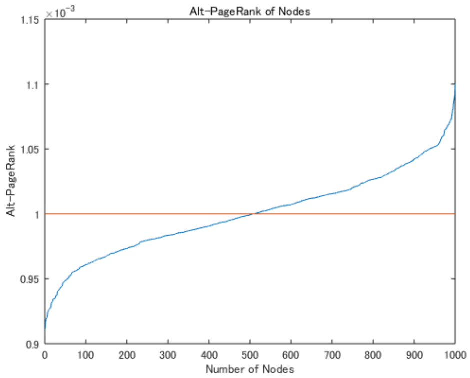

Fig. 2: シミュレーションの結果．$N = 1000$ ノードの強連結なグラフについて Alt-PageRank を計算し，大きさの順番に並べたのが青線，Alt-PageRank の基準として $1/N$ をプロットしたものが赤線．

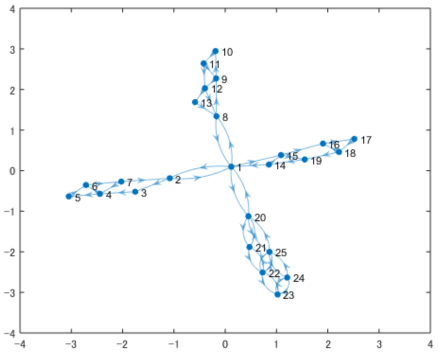

Fig. 3: シミュレーションに用いたマルチエージェントシステムのネットワーク構造．付記された番号がエージェント番号．

にノードを選んで制御点とすることで，敵対チームより自分のチームの目標ベクトルに近づけることができる．

以下に具体例として Fig. 2 を示す．ある強連結な 1000 ノードのグラフに対して APR を計算し，それを大きさの順に並べたものを図の青線で表す．ここで，比較のため，完全に対称なグラフの場合，すべてのノードの APR の値は $1/N$ となるので，それを図中の赤線で示している．グラフの非対称性により，ノードの重要性に差が生じていることが分かる．

次に，別の例として Fig. 3 のようなグラフ構造を示す．このマルチエージェントシステムの各エージェントについて Alt-PageRank の値をそれぞれ計算すると，Fig. 4 に表されるような値になる．制御の意味での重要なエージェントは第 1 エージェントと第 9 エージェントである．このネットワークに対し，2 つのチームがシェア争いを行う事を考える．

まず，第 1 チームが第 1 エージェントと第 9 エージェントを，第 2 チームが第 3 エージェントと第 5 エージェントをそれぞれ制御点として選んだとする．このときの各チームが選んだ制御点の Alt-PageRank の総和はそれぞれ 0.1404, 0.0351 であった．平衡点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ および $\boldsymbol{x}^{(2)}$ をそれぞれ計算し，$i = 1, 2, \ldots, 25$ に対して $x_i^{(1)}$ と $x_i^{(2)}$ の値を Fig. 5 に示す．その結果，すべてのノー

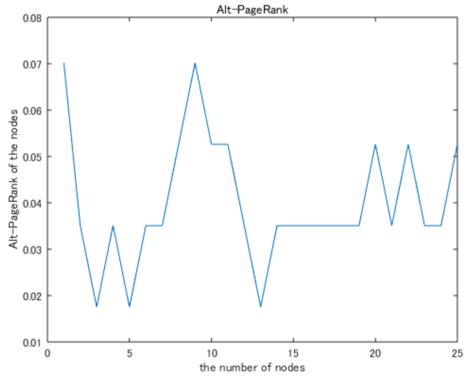

Fig. 4: Fig. 3 における Alt-PageRank の値．

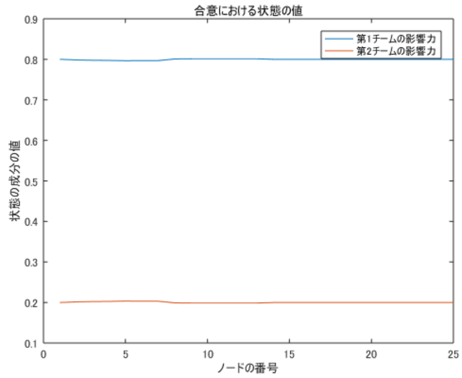

Fig. 5: Fig. 3 において第 1 チームが第 1 エージェントと第 9 エージェントを，第 2 チームが第 3 エージェントと第 5 エージェントをそれぞれ制御点として選んだときの平衡状態．青線が第 1 チームの影響の寄与分，赤線が第 2 チームの影響の寄与分．値の大きい方のチームが優勢．

ドにおいて第 1 チームが優勢であり，第 1 チームがマルチエージェントシステムを独占することが分かった．

次に，第 1 チームが第 1 エージェントを，第 2 チームが第 3 エージェントと第 10 エージェントをそれぞれ制御点として選んだとする．このときの各チームが選んだ制御点の Alt-PageRank の総和はともに 0.0702 であった．上と同様に平衡点における状態を計算し，グラフとして表示したものを Fig. 6 に示す．その結果，一部のエージェントにおいては第 1 チームが，それ以外のエージェントにおいては第 2 チームが優勢となり，対等なシェア争いが発生することがわかった．仮に競合するチームに主要なノードを制御点に選ばれてしまったとしても，ほかのエージェントを複数選び，Alt-PageRank の総和が競合チームを上回れば，システムを支配できることが分かる．

4　結論

複数の主体がそれぞれ異なる目標値を持ち，それぞれが制御入力を加えるエージェントを選び，各主体はできるだけ多くのエージェントの状態を自分の目標値にできるだけ近づけようとする．このような状況で Weakly Controlled System を状態量をスカラーからベクトルに

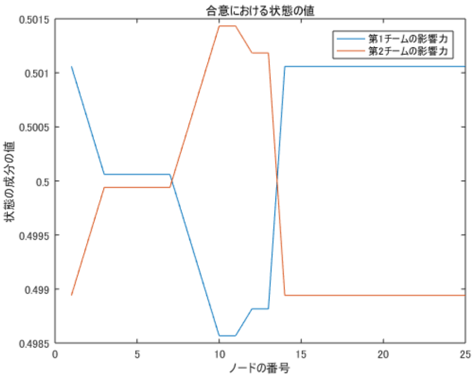

Fig. 6: Fig. 3 において第 1 チームが第 1 エージェントを，第 2 チームが第 3 エージェントと第 10 エージェントをそれぞれ制御点として選んだときの平衡状態．青線が第 1 チームの影響の寄与分，赤線が第 2 チームの影響の寄与分．値の大きい方のチームが優勢．

自然に拡張してできるシステムでは，制御点として重要なノードは Alt-PageRank の値によって特徴づけられることがわかった．また，Alt-PageRank の値の大きい方からノードを制御点として選ぶことでシステムを独占的に支配しやすくなる．一方，仮に Alt-PageRank の値の大きいノードを競合するチームに取られていたとしても，Alt-PageRank の総和が相手を上回るようにノードを選んで制御点とすることで，システムを対等に，あるいは逆転して独占して支配することが可能である．

参考文献

1) K. Tsumura and H. Yamamoto,“ Optimal multiple controlling nodes problem for multi-agent systems via Alt-PageRank,” in Proc. 4th IFAC Workshop on Distributed Estimation Control in Networked Systems, pp. 433438, 2013.

2) 川崎一青 ”大規模マルチエージェントシステムにおける最適制御点・観測点問題”, 東京大学大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻修士論文 (2014)

3) R. Olfati-Saber, J.A. Fax, and R.M. Murray, ”Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems”, Proceedings of the IEEE, Vol. 95, No. 1, pp. 215-233, 2007.

4) 斎藤正彦，線形代数入門，1996.

5) G. J. Golub and C. F. Van Loan, ”Matrix Computations”, Vol. 3, Johns Hopkins University Press, 1996.