

シェアバイクの確率的分配法に関する研究

○重見 和秀, 津村 幸治 (東京大学)

Probabilistic distribution scheduling for bike sharing

*K. Shigemi, K. Tsumura (The University of Tokyo)

Abstract— Bike sharing system has attracted attention around the world for the last several decades as eco-friendly and healthy means of transportation and to deal with the bike sharing rebalancing problem is important to provide comfortable service. One of the methods to rebalance the bike distribution is to incentivize users to rent or return a bike at an appropriate station. In this paper, corresponding the amount of incentive and probability of user's action to the incentive, we model the bike sharing system, introduce distributed control method to rebalance the bike distribution, show properties of the method on stability in certain condition, and demonstrate the validity of method by numerical experiments.

Key Words: Bike sharing, Stochastic system, Distributed system

1 はじめに

シェアバイクシステムは、環境に優しく健康的であるとして近年世界中で注目を集めている交通システムである¹⁾。シェアバイクシステムにおいて利用者は、複数の地点に設置されているポート (station) のうち、好きなポートから自転車を借り、好きなポートへ返却することができる。自転車を借りたポートへ返却する必要がないため、利用者の自転車による自由度の高い交通環境を実現している。

しかし、各ポートについて出発地として利用される回数と到着地として利用される回数に偏りがある場合、ポートに駐輪されている自転車の台数が無くなる、もしくはポートのキャパシティを超えてしまう状況が起こる。このような各ポートの駐輪台数の偏りを回避する方法の一つとして、ユーザーにインセンティブをかける方法があげられる。本論文では特に、ユーザーへのインセンティブの大きさがユーザーのポート選択に関する確率に対応していると仮定し、この確率値の制御を分散的に行うことで駐輪台数の隔たりを緩和する手法を提案する。

駐輪台数の偏りをユーザーに対するインセンティブによって改善する手法について、インセンティブの大きさを適切に設計し、トラックでの自転車の輸送をモデルに組み込んだシミュレーションにより、ユーザーが自転車を借りたいが借りられない、あるいは返したいが返せない状況がインセンティブの導入によって改善される様子が示した研究⁶⁾や、各ポートは一定距離内にあるポートのみとポートの自転車の占有率 (キャパシティに対する駐輪台数の割合) に関する情報伝達が可能であるという状況下ユーザーに対し代わりに提案するポートを決定するというシステムを提案、その有効性を示した研究がある⁵⁾。

一方、ユーザーへのインセンティブをユーザーの行動の確率に対応付け、かつ、各ポートの駐輪台数の偏りを緩和するため、確率値の分散的制御という枠組みをシェアバイクシステムに導入することは我々の知る限り新たな試みであり、本論文ではこの枠組みのモデ

ル化、分散的制御則の提案、そして一定条件下における安定性に関する性質の証明と数値実験による提案分散的制御則の有効性の実証を目的としている。

分散的制御の枠組みを取り入れるにあたり、複数のエージェントを含むシステムにおけるコンセンサス問題³⁾⁴⁾が本論文と密接に関わるテーマとなっている。特に、駐輪台数は整数値を持つという特徴から、各エージェントの持つ値が整数であるという制約下においてコンセンサスをとるアルゴリズム (quantized gossip algorithm)²⁾に関する性質やその証明方法を本論文では大いに参考にしている。

また、確率値の分散的制御によるシステム安定化手法は過去の研究でも提案されており⁷⁾、本論文はこの確率値の分散的制御手法に発想を得た。本論文では、分散的制御をバイクシェアシステムに応用するあたり、これらコンセンサス問題に関する先行研究をもととしたモデルの作成と制御則の提案を行う。

本論文の構成は以下のようになっている。第2章では、バイクシェアシステムのモデルを説明する。第3章では、設計したモデルについて分散的制御則の提案を行い、提案制御則の安定性に関する性質を示す。第4章では、提案制御則の有効性を確かめるため、各モデルについて数値実験を行った結果を報告する。最後に、第5章で本論文の内容をまとめ、今後の展望を述べる。

表記法

- $a[n]$: 離散時間系における時刻 n での a の値
- $\mathbb{R}_{>0}$: 正の実数の集合
- \mathbb{Z} : 整数の集合
- $\mathbb{Z}_{\geq n}$: n 以上の整数の集合
- $\{0, 1\}^{m \times n}$: すべての要素が 0 か 1 であるような $m \times n$ 行列の集合
- $\|\cdot\|_2$: 二乗ノルム
- A_{ij} : 行列 A の i 行 j 列成分

- x^T : 行列 x の転置
- $\mathbf{1}$: 要素が全て 1 である適切な大きさの縦ベクトル
- $|A|$: 集合 A の要素の個数
- $E[\cdot]$: 条件付き期待値
- ${}_n C_m$: 異なる n 個のものから m 個のものを選ぶ組み合わせ数, $\frac{n!}{(n-m)!m!}$

2 シェアバイクシステムのモデル化

本章ではシェアバイクシステムのモデル化に関する説明を行う。

2.1 ポートと駐輪台数

シェアバイクシステムは b 台の自転車とポート集合 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{|V|}\}$ からなる。

本研究では離散時間系でのダイナミクスを考える。時間を表す変数 n は整数値を取り、1 クロックは実時間上で C であるとする。「時刻 n 」は実時間軸上で $C \times n$ である。また、「クロック n 」は実時間軸上で $[C \times n, C \times (n+1))$ を表すものとする。

各ポート $v \in V$ が時刻 n に保有している自転車の台数を $x^v[n]$ とする。この保有台数をベクトル表示したものを $\mathbf{x}[n] = [x^{v_1}[n], x^{v_2}[n], \dots, x^{v_{|V|}}[n]]^T$ とする。

各ポート v はキャパシティ c_v が存在するものとする。保有台数 $x^v[n]$ がキャパシティ c_v を超えた場合はポートから自転車があふれている（例えば、ポートに停められない分の自転車が路上に駐輪されている）状況を表す。逆に、保有台数 $x^v[n]$ が 0 を下回っており、その台数が $-n_1$ 台 ($n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) と表される場合、時刻 n までにポート v が保有する自転車の台数が貸し出し需要過多で不足してしまい、何かしらの方法でシステムの外から n_1 台の自転車を借りている状況を表すものとして考える。この状況下でポートへユーザーから自転車が n_2 台 ($n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) 返却された場合は、即座にシステムの外から借りた自転車の台数のうち清算できるだけの台数 ($\min\{n_1, n_2\}$ 台) をシステムの外に返すものとする。結果、ポートの保有台数は $-n_1 + n_2$ 台と表現されることになる。この保有台数の値は、 $-n_1 + n_2 \geq 0$ である場合はポートの自転車の駐輪台数を、 $-n_1 + n_2 < 0$ の場合はまだシステムの外に返却しなければならない自転車の台数を負の値で表している。

利用者は、各ポート v から自転車を借りる時、もしくは返す時に、状況に応じてポート v から「近くの別のポート」から自転車を借りる、もしくは返すことを提案される。(2.2 節) この、ポート v の「近くの別のポート」集合を N_v と定義する。ここで、 $v' \in N_v \Leftrightarrow v \in N_{v'}$ とする。

以上のように、各ポート v に対し近くのポート集合 N_v が定義されることで、ポート集合はネットワークを形成する。このネットワークは無向グラフ G として表現できる。この無向グラフ G のエッジ集合を E 、隣接行列を $M \in \{0, 1\}^{|V| \times |V|}$ とする。ここで、 M の要素は

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & (j \in N_i) \\ 0 & (j \notin N_i) \end{cases} \quad (1)$$

である。

本研究において、この無向グラフは 2 つ以上のノードを持ち、また、連結であるとする。

加えて、 $N_v^+ := N_v \cup \{v\}$, $N_{\max} := \max_{v \in V} |N_v|$ とする。

2.2 インセンティブとユーザーの挙動

各ポートの駐輪台数に偏りが生じている場合、それを解消するため、以下のようなインセンティブをユーザーに提案することを考える。

- 駐輪台数の多いポート v に自転車を返そうとするユーザーに対して、もし仮に近くの別のポート集合 N_v の中でポート v と比べて相対的に空いているポートがある場合はそのポートに返却することをインセンティブによって提案する
- 駐輪台数の少ないポート v から自転車を借りようとするユーザーに対して、もし仮に近くの別のポート集合 N_v の中でポート v と比べて相対的に混んでいるポートがある場合はそのポートから自転車を貸し出すことをインセンティブによって提案する

ユーザーがこの提案に従うかどうか、従うとしてどのポートに変更するかは確率的に記述されるものとする。また、本研究ではインセンティブの大きさを適切に設定することでこの確率の値を意図した値にすることができるものとする。

このインセンティブは、各ユーザーに対して複数の提案が同時になされる可能性もある。例えば、ポート v に自転車を返却しようとしているユーザーに対し、ポート v より空いている近くの別のポートが 3 か所ある時、それらのポートを $v_i (i = 1, 2, 3)$ とすると、「仮にポート v_i に自転車を返却した場合のインセンティブ」が各ポート v_i に関して同時にユーザーに提案される。これら 3 つのインセンティブの大きさの組み合わせに対して、予定通りポート v に返却する確率 p_I^{vv} 、ポート $v_i (i = 1, 2, 3)$ に返却先を変更する確率 $p_I^{vv_i}$ の 4 値が定まることになる。この 4 値の和は 1 であり、この確率に従ってユーザーは行先のポートを選ぶ状況を想定する。

2.3 具体的なインセンティブ提案方法

まず、考えられるインセンティブの形式について、ユーザーが仮に提案を受け入れた場合、そのユーザーの利用料金を割安にすること、同じ利用金額で利用できる時間を長くすること、もしくは後に商品や割引サービスと交換ができるポイントを加算する方法などがあげられる。

インセンティブを提案する方法について、ユーザーは自転車を貸し借りしたい場合事前に必ずポートと連絡をとり、そのポートの利用方法（自転車を借りるか返すか）に対応するインセンティブの提案を受けることを考える。例えば、ユーザーは携帯端末等で自分の利用したいポートと通信し、ポートからのユーザーに対する提案とインセンティブの大きさを確認する。こ

のインセンティブの大きさによってユーザーは確率的に提案に従うかどうかを決めることを考える。

2.4 インセンティブと駐輪台数のダイナミクスモデル

インセンティブと各ポートの駐輪台数のダイナミクスに関するモデルを説明する。まず、クロック n にポート v へ自転車を返そうとするユーザー、ポート v から自転車を借りようとするユーザーの数を $d_I^v[n], d_O^v[n]$ とし、これらの値は時刻 n 時点ですべて既知であるものとする。

クロック n に自転車を貸し借りするユーザーに対して、時刻 n 時点での状態に応じたインセンティブをポートから提案する。すなわち、クロック n に提案されるインセンティブの大きさは時刻 n 時点で確定され、クロック n 内で不変である。

各ポートから提案されたインセンティブの大きさに応じた確率で、ポート v で自転車を貸し借りしようとしているユーザーは N_v^+ のいずれかのポートに貸し借り先を変更する、もしくは当初の予定通りポート v で自転車の貸し借りをを行う。ここで、ユーザーがインセンティブにより貸し借りするポートを変更した場合、同一クロック内に変更先ポートで貸し借りを済ませるものとする。

インセンティブによるユーザーに行動に関する確率を以下のように表現する。

- $p_I^{vv'}[n] (v' \in N_v^+)$: クロック n にポート v へ自転車を返却しようとするユーザーがインセンティブを提案された結果ポート $v' \in N_v^+$ に返却する確率
- $p_O^{vv'}[n] (v' \in N_v^+)$: クロック n にポート v へ自転車を借りようとするユーザーがインセンティブを提案された結果ポート $v' \in N_v^+$ から借りる確率

これらの定義より以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{v' \in N_v^+} p_I^{vv'}[n] \\ 1 &= \sum_{v' \in N_v^+} p_O^{vv'}[n] \end{aligned} \quad (2)$$

クロック n にポート v へ自転車を返そうとするユーザー $d_I^v[n]$ 人には同じインセンティブが提案され、ユーザーは1人1人独立にインセンティブに従うかを決めるものとする。クロック n にポート v から自転車を借りようとするユーザー $d_O^v[n]$ 人についても同様、同じインセンティブが提案され、ユーザーは1人1人独立にインセンティブに従うかを決めるものとする。

また、以下のような確率変数を定義する。

- $s_I^{vv'}[n] (v' \in N_v^+)$: クロック n にポート v へ自転車を返そうとしていたユーザー $d_I^v[n]$ 人のうち、インセンティブを提案された結果、ポート v' に自転車を返すことにする人数
- $s_O^{vv'}[n] (v' \in N_v^+)$: クロック n にポート v から自転車を借りようとしていたユーザー $d_O^v[n]$ 人のうち、インセンティブを提案された結果、ポート v' から自転車を借りることにする人数

上記の確率変数について、定義より以下の式が成立する。

$$\begin{aligned} d_I^v[n] &= \sum_{v' \in N_v^+} s_I^{vv'}[n] \\ d_O^v[n] &= \sum_{v' \in N_v^+} s_O^{vv'}[n] \end{aligned} \quad (3)$$

以上の確率変数を用いて各ポートの駐輪台数のダイナミクスは以下のように表現される。

$$\begin{aligned} x^v[n+1] &= x^v[n] \\ &+ \sum_{v' \in N_v^+} s_I^{v'v}[n] - \sum_{v' \in N_v^+} s_O^{v'v}[n] \end{aligned} \quad (4)$$

3 分散的確率制御によるコンセンサスの形成

3.1 制御の目的と仮定

インセンティブの大きさ、すなわち前章で議論してきたユーザーの行動に関する確率値に対し、適切に状態フィードバックを行うことで全体のポートの駐輪台数の隔たりを緩和することを目的とするものである。初めに「駐輪台数の隔たり」をここで定義する。

まず、各ポートにはクロック n に応じて駐輪台数の基準値 $\mathbf{x}_0[n] = [x_0^{v_1}[n], x_0^{v_2}[n], \dots, x_0^{v_{|V|}}[n]]^T$ が定められているものとする。基準値 $x_0^v[n] \in \mathbb{Z}$ は以下の条件式 (5,6) を満たしているものから自由に設定することができるものとする。

$$x_0^v[n] + \delta[n] \in \mathbb{Z} \quad (\forall v \in V) \quad (5)$$

$$\sum_{v \in V} x_0^v[n] = \sum_{v \in V} x^v[n] \quad (6)$$

ここで、 $\delta[n]$ は 0 以上 1 未満の実数値定数である。 $\delta[n] = 0$ である場合、 $x_0^v[n]$ が全て整数値であることを意味する。

例えば、 $x_0^v[n] = \sum_{v \in V} x^v[n] / |V|$ は条件式 (5,6) を満たす基準値である。

基準値 $\mathbf{x}_0[n]$ は、時刻 n 時点において、全ポートに駐輪されている自転車を仮に自由に再分配できる場合における理想的な駐輪台数分布と解釈することができる。

ここで、時刻 n における駐輪台数の基準値に対する誤差ベクトル $\mathbf{x}[n] - \mathbf{x}_0[n]$ を $\tilde{\mathbf{x}}[n] = [\tilde{x}^{v_1}[n], \tilde{x}^{v_2}[n], \dots, \tilde{x}^{v_{|V|}}[n]]^T$ とする。ここで、 $\sum_{v \in V} \tilde{x}^v[n] = 0$ が成立する。

本研究では、ユーザーの行動に関する確率の値 $p_I^{vv'}[n], p_O^{vv'}[n]$ に対し、適切なフィードバックを行うことで、時刻 n (クロックの切り替わり時点) における駐輪台数と基準値の二乗誤差の和、すなわちの $\|\tilde{\mathbf{x}}[n]\|_2^2$ を小さくすることが制御の目的である。

3.2 制御則の提案

設定したモデルに対し、状態フィードバックにより、 $p_I^{vv'}[n], p_O^{vv'}[n]$ は以下の計算式で求まる値に制御することを提案する。

$$p_I^{vv'}[n] = \begin{cases} k_{1I}^{vv'} u\left(k_{2I}^{vv'} (\tilde{x}^v[n] - \tilde{x}^{v'}[n])\right) & (v' \in N_v) \\ 1 - \sum_{v'' \in N_v} p_I^{vv''}[n] & (v' = v) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \quad (7)$$

$$p_O^{vv'}[n] = \begin{cases} k_{1O}^{vv'} u\left(-k_{2O}^{vv'}\left(\tilde{x}^v[n] - \tilde{x}^{v'}[n]\right)\right) & (v' \in N_v) \\ 1 - \sum_{v'' \in N_v} p_O^{vv''}[n] & (v' = v) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \quad (8)$$

ただし、用いている定数 $k_{iX}^{vv'}$ は以下の条件を満たす。
 $(v \in V, v' \in N_v, i \in \{1, 2\}, X \in \{I, O\})$

$$k_{iX}^{vv'} > 0 \quad (9)$$

$$\sum_{v' \in N_v} k_{1X}^{vv'} \leq 1 \quad (10)$$

また、 $u(x)$ は以下のように定義される関数である。
(Fig.1)

$$u(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} \quad (11)$$

提案する制御則の意図 $p_I^{vv'}[n]$ ($v' \in N_v$) は、 $\tilde{x}^v[n] > \tilde{x}^{v'}[n]$ である場合、すなわちポート v の方がポート $v' \in N_v$ よりも基準値との差の観点で相対的に駐輪台数が多い場合にのみ正の値を取る。これは、混んでいるポートに自転車を返却しようとするユーザーに対し、相対的に空いている近くの別のポートがある場合はそのポートへの返却を提案することに対応している。

逆に、 $p_O^{vv'}[n]$ ($v' \in N_v$) は、 $\tilde{x}^v[n] < \tilde{x}^{v'}[n]$ である場合、すなわちポート v の方がポート $v' \in N_v$ よりも基準値との差の観点で相対的に駐輪台数が少ない場合にのみ正の値を取る。これは、空いているポートから自転車を貸し出そうとするユーザーに対し、相対的に混んでいる近くの別のポートがある場合はそのポートからの貸し出しを提案することに対応している。

定数 $k_{iX}^{vv'}$ はフィードバックゲインととらえることができる。

また、確率の値は負の値を取らないこと、式 (2) が成立することから、式 (10) の条件を設定し関数 u を用いた制御則になっている。

3.3 安定性に関する議論の仮定と準備

以降、安定性に関する解析にあたり、本研究では各クロック・各ポートにおいて出入りする自転車台数が等しく、その台数は1台以上であること、そしてクロッ

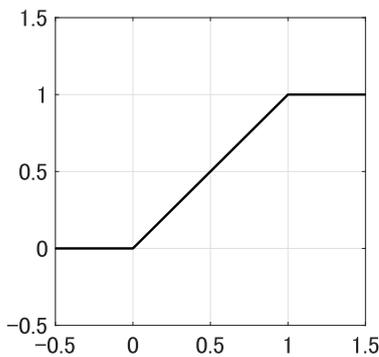


Fig. 1: function $u(x)$

ク n で出入りする自転車の総台数 $d[n]$ には上限 d_{\max} があることを仮定する。すなわち、式 (12,13) が成立する場合について考える。

$$d_I^v[n] = d_O^v[n] \geq 1 \quad (\forall v \in V, n \in \mathbb{Z}) \quad (12)$$

$$\sum_{v \in V} d_I^v[n] + \sum_{v \in V} d_O^v[n] \leq d_{\max} \quad (13)$$

この時、全てののポートの駐輪台数の総和はクロックの切り替わり時点で一定となることから、式 (6) の右辺は一定となる。したがって、基準値 $x_0[n]$ と定数 $\delta[n]$ は共に一定値とすることができる。以降、 $x_0[n] = x_0$, $\delta[n] = \delta$ であるとして議論を進める。

ここで、以下の定義を行う。

定義 1. $\max_{v \in V} \tilde{x}^v[n] - \min_{v \in V} \tilde{x}^v[n] \leq 1$ である場合、 $\tilde{x}[n]$ は離散コンセンサス状態であるという。

この状態は、 $\tilde{x}^v[n]$ の総和がゼロであることより、 $\tilde{x}[n]$ の各要素が δ , $\delta - 1$ の2値により構成されている場合に等しい。特に、 $\delta = 0$ である場合、 $\tilde{x}^v[n]$ の総和がゼロであることから、 $\tilde{x}^v[n] = 0$ ($\forall v \in V$) を意味する。

この離散コンセンサス状態の定義は、quantized gossip algorithm に関する研究²⁾ で用いられている定義を本論文のモデルで用いるために一部改変したものである。

3.4 安定性に関する性質

まず、駐輪台数の基準値に対する誤差ベクトル $\tilde{x}[n]$ を用い、リアプノフ関数 $\mathcal{V}[\mathbf{x}[n]]$ を以下のように定義する。

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}[n]) = \|\mathbf{x}[n] - \mathbf{x}_0\|_2^2 = \|\tilde{x}[n]\|_2^2 \quad (14)$$

クロック n からクロック $n + \Delta n$ ($\Delta n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) におけるリアプノフ関数の増分の期待値を $\Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) := E[\mathcal{V}(\mathbf{x}[n + \Delta n]) | \mathbf{x}[n]] - \mathcal{V}(\mathbf{x}[n])$ と表現する。

モデルに対し 3.2 節の制御則を適用した場合において以下の定理が成り立つ。

定理 1. 駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ の値が離散コンセンサス状態でない限り、ゲイン $k_{1I}^{vv'}$, $k_{1O}^{vv'}$ を十分小さい値でかつ適切に設定することで、次の式が成立するような定数 $\Delta n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ がとれる。

$$\Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) < -\nu \quad (15)$$

特に、ゲイン $k_{iX}^{vv'}$ が全て等しい値 k_1^* であった場合、 k_1^* を十分小さく設定することで、式 (15) が成立するような $\Delta n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$ がとれる。

証明. 仮定より、インセンティブを一切かけない場合、各ポートの駐輪台数は一定であり、インセンティブによってユーザーが利用ポートを変更した場合に駐輪台数は変化する。

以下の値を定義する。

- $q_m[n]$: クロック n において、同時に m 人のユーザーがインセンティブに従いポートを変更する確率

- $\Delta\mathcal{V}_{\max}(\mathbf{x}[n])_m$: クロック n において、駐輪台数配置が $\mathbf{x}[n]$ である時、クロック n 内で同時に m 人のユーザーがインセンティブに従いポートを変更する場合における、リアプノフ関数の増分 $\mathcal{V}(\mathbf{x}[n+1]) - \mathcal{V}(\mathbf{x}[n])$ の上限値

また、定数 $k_{\bullet\bullet}$ に対して以下の値を定義する

$$\begin{aligned} k_{1I}^v &:= \sum_{v' \in N_v} k_{1I}^{vv'} \\ k_{1O}^v &:= \sum_{v' \in N_v} k_{1O}^{vv'} \\ k_{1I} &:= \max_{v \in V} k_{1I}^v \\ k_{1O} &:= \max_{v \in V} k_{1O}^v \\ k_1 &:= \max(k_{1I}, k_{1O}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} k_{uI} &:= \min_{(v,v') \in E} k_{1I}^{vv'} u(k_{2I}^{vv'}) \\ k_{uO} &:= \min_{(v,v') \in E} k_{1O}^{vv'} u(k_{2O}^{vv'}) \\ k_u &:= \min(k_{uI}, k_{uO}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで定義した値について、定数 $k_{\bullet\bullet}$ の定義より、 $k_{1I}^v, k_{1O}^v, k_{1I}, k_{1O}, k_1 \leq 1$, $k_{uI}, k_{uO}, k_u > 0$ が成立する。ここではゲイン $k_{1I}^{vv'}$, $k_{1O}^{vv'}$ が十分小さい値の場合を考えているので、 $k_{1I}^v, k_{1O}^v, k_{1I}, k_{1O}, k_1 < 1$ とできる。詳細は省略するが、これらの値を用いることで以下の式が導かれる。

$$q_m[n] \leq d_{\max} C_m k_1^m \quad (18)$$

$$\Delta\mathcal{V}_{\max}(\mathbf{x}[n])_m \leq 2(m-1)m \quad (19)$$

これにより、1クロックのリアプノフ関数の増分期待値は次のように評価することができる。ここで、 $C_{\max} = 2d_{\max}^2 \times \max_{m \in \{0,1,\dots,d_{\max}\}} d_{\max} C_m$ を表す。

$$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], 1) < C_{\max} \frac{k_1^2}{1-k_1} \quad (20)$$

以上の準備をもとに、クロック n からクロック $n + \Delta n$ ($\Delta n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) におけるリアプノフ関数の増分 $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)$ について考える。

このリアプノフ関数の増分 $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)$ を以下の2つの要素に分解する。

- $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\alpha$: クロック n からクロック $n + \Delta n$ にかけて、同じクロックで同時に2人以上のユーザーがインセンティブに従いポートを変更することが1度以上起こる場合
- $\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\beta$: クロック n からクロック $n + \Delta n$ にかけて常に各クロック1人以下のユーザーがインセンティブに従いポートを変更する場合

この時、以下の式が成立する。

$$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) = \Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\alpha + \Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\beta \quad (21)$$

各項について評価を行っていく。

- クロック n からクロック $n + \Delta n$ にかけて、同じクロックで同時に2人以上のユーザーがインセンティブに従いポートを変更することが1度以上起こる場合

$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\alpha$ は式 (20) より次式で上から評価ができる。

$$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\alpha < C_{\max} \frac{k_1^2}{1-k_1} \times \Delta n \quad (22)$$

- クロック n からクロック $n + \Delta n$ にかけて常に1人以下のユーザーがインセンティブに従いポートを変更する場合

$\Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\beta$ について、詳細は省略するが、駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ は quantized gossip algorithm²⁾ に対応する挙動を示すことを用いることで、 $\tilde{\mathbf{x}}[n]$ が離散コンセンサス状態でなく、 $\Delta n \geq |V|$ であり、また、ゲインが十分小さく $k_u < \frac{1}{\Delta n - (|V|-1)}$ が成立するならば、以下の式が成立することが示せる。

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n)_\beta &< -\frac{2}{(|V|-1)!} (1-k_1)^{d_{\max}\Delta n} \\ &\times [k_u(\Delta n - (|V|-1))]^{|V|-1} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、以下のように定義式 (9,10) と同じ条件式を満たす $k_{1\bullet}^{\bullet\bullet}, k_{2\bullet}^{\bullet\bullet}$ を準備する。 $(v \in V, v' \in N_v, i \in \{1,2\}, X \in \{I, O\})$

$$k_{iX}^{\prime vv'} > 0 \quad (24)$$

$$\sum_{v' \in N_v} k_{1X}^{\prime vv'} \leq 1 \quad (25)$$

そして、ゲインを $k_{1\bullet}^{\bullet\bullet} = \gamma \times k_{1\bullet}^{\bullet\bullet}$, $k_{2\bullet}^{\bullet\bullet} = k_{2\bullet}^{\bullet\bullet}$ ($0 < \gamma < 1$) と設定することを考える。

この時、 γ を0に近づけると、 k_1 は γ に従って小さくなる。また、式 (16,17) 同様、次の値を定義する。

$$\begin{aligned} k_{1I}^{\prime v} &:= \sum_{v' \in N_v} k_{1I}^{\prime vv'} \\ k_{1O}^{\prime v} &:= \sum_{v' \in N_v} k_{1O}^{\prime vv'} \\ k_{1I}' &:= \max_{v \in V} k_{1I}^{\prime v} \\ k_{1O}' &:= \max_{v \in V} k_{1O}^{\prime v} \\ k_1' &:= \max(k_{1I}', k_{1O}') \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} k_{uI}' &:= \min_{(v,v') \in E} k_{1I}^{\prime vv'} u(k_{2I}^{\prime vv'}) \\ k_{uO}' &:= \min_{(v,v') \in E} k_{1O}^{\prime vv'} u(k_{2O}^{\prime vv'}) \\ k_u' &:= \min(k_{uI}', k_{uO}') \end{aligned} \quad (27)$$

以上の記号を用いて、式 (21,22,23) より、 $\tilde{\mathbf{x}}[n]$ が離散コンセンサス状態でなく、 $\Delta n \geq |V|$ であり、また、ゲインが十分小さく $k_u < \frac{1}{\Delta n - (|V|-1)}$ が成立するなら

ば、次の式が成立する。

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) \\ & < C_{\max} \frac{\gamma^2 k_1'^2}{1 - \gamma k_1'} \Delta n \\ & \quad - \frac{2(1 - \gamma k_1')^{d_{\max} \Delta n}}{(|V| - 1)!} \\ & \quad \times [\gamma k_u' (\Delta n - (|V| - 1))]^{|V| - 1} \quad (28) \end{aligned}$$

ここで、 $\Delta n = \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor$ とする。 γ が十分小さい時、 $\Delta n \geq |V|$ の条件は満たされる。 また、条件 $\gamma k_u' < \frac{1}{\Delta n - (|V| - 1)}$ を満たしているため、式 (28) に適用することが可能であり、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} & \Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) \\ & < C_{\max} \frac{\gamma^2 k_1'^2}{1 - \gamma k_1'} \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor \\ & \quad - \frac{2(1 - \gamma k_1')^{d_{\max} \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor}}{(|V| - 1)!} \\ & \quad \times \left[\gamma k_u' \left(\left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor - (|V| - 1) \right) \right]^{|V| - 1} \quad (29) \end{aligned}$$

式 (29) 右辺の第 1 項と第 2 項について γ を 0 に近づけた時の挙動を考える。

• 式 (29) 右辺の第 1 項

この項に関して、次の式が成り立つ。

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} C_{\max} \frac{\gamma^2 k_1'^2}{1 - \gamma k_1'} \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor = 0 \quad (30)$$

すなわち、 γ を 0 に近づけるとこの項は 0 に近づく。

• 式 (29) 右辺の第 2 項

この項は以下のように評価できる。

$$\begin{aligned} & \frac{2(1 - \gamma k_1')^{d_{\max} \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor}}{(|V| - 1)!} \\ & \quad \times \left[\gamma k_u' \left(\left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor - (|V| - 1) \right) \right]^{|V| - 1} \\ & > \frac{2}{(|V| - 1)!} (1 - \gamma k_1')^{d_{\max}} \\ & \quad \times \left[(1 - \gamma k_1')^{\frac{1}{\gamma k_1'}} \right]^{d_{\max} k_1' / k_u'} \\ & \quad \times [1 - \gamma k_u' (|V| - 1)]^{|V| - 1} \quad (31) \end{aligned}$$

この式は γ に関する関数を 3 つ掛け合わせたものになっているが、各関数は全て単調減少関数であり、かつ γ 十分に小さい時、常に正の値をとることが確認できる。 よって、式 (29) の右辺第 2 項の下限である式 (31) 右辺は、 γ 十分に小さい時、正の値を取り、 γ の値を 0 に近づけるとそれに伴って値が増加する。

以上、式 (29) 右辺の第 1 項と第 2 項に関する性質により、式 (29) 右辺は γ を十分 0 に近づけることで負になる。

この時のゲインの係数を γ_0 、式 (29) 右辺を $-\nu$ とおくことで、ゲイン $k_{1I}^{vv'}$ 、 $k_{1O}^{vv'}$ を十分小さい値でかつ適切に設定した場合、かつ $\hat{\mathbf{x}}[n]$ が離散コンセンサス状態でない場合、 $\Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \Delta n) = \Delta \mathcal{V}(\mathbf{x}[n], \left\lfloor \frac{1}{k_u' \gamma} \right\rfloor)$ は負となることが示せたことになる。

すなわち、ゲイン $k_{1I}^{vv'}$ 、 $k_{1O}^{vv'}$ を十分小さい値で適切に設定することで、駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ が離散コンセンサス状態でない限り、式 (15) が成立することを示せた。

特にゲイン $k_{1I}^{vv'}$ が全て等しい値 k_1^* であった場合においても同様に考えることが可能であり、 k_1^* を十分小さく設定することで、駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ が離散コンセンサス状態でない限り、式 (15) が成立する。 □

考察 本稿では基本となる状況を考えるため、仮想的に各クロック・各ポートにおける自転車の出入り台数が等しく、各クロックについて 1 台以上の出入りがあることを仮定している。実際のバイクシェアシステムでの状況では、このような様な状況ではないことが一般的である。また、定理 1 では、十分条件として、十分ゲインを小さくすることで、駐輪台数が離散コンセンサス状態を取っていない限り、リアプノフ関数は期待値として下がることを示したものであるが、この性質を保証できるゲインは実用上の観点で小さい値となっており、保守的な条件となっている。以上より、より実用的で非保守的な条件あるいは制御則の提案が課題となる。

4 数値実験による提案制御則有効性の検証

第 2 章で設計したモデルに対し、第 3 章で用いた仮定の下それぞれ提案した制御則の有効性を数値実験により確かめた。

本数値実験では、ランダムに作成したグラフ (Fig. 2) を用いた。このグラフは連結であり、ノード数 $|V| = 20$ 、最大次数 $N_{\max} = 5$ である。

また、第 3 章同様、各クロック・各ポートにおいて出入りする自転車台数が等しく、その台数は 1 台以上

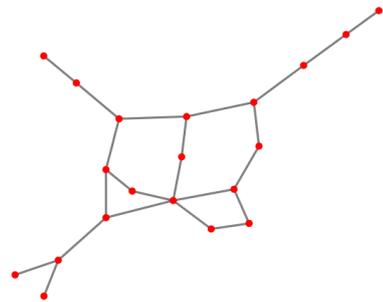
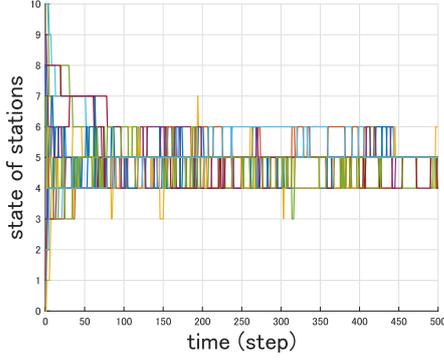
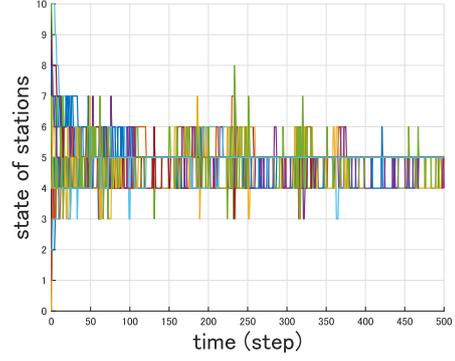
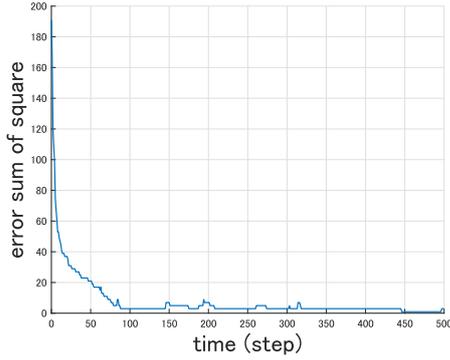
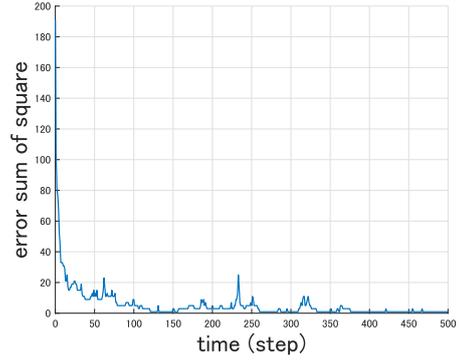


Fig. 2: The network structure of stations used in the numerical experiments

(a) $k_1 = 0.5$ (b) $k_1 = 1.0$ Fig. 3: State transition of stations in the system $\mathbf{x}[n]$ (a) $k_1 = 0.5$ (b) $k_1 = 1.0$ Fig. 4: Trajectory of error sum of squares $\|\tilde{\mathbf{x}}[n]\|_2^2$

であるという仮定を用いた. 加えて, 各定数を以下のように設定した.

- 初期値 $\mathbf{x}[0]$: 各要素に対して 0 から 10 の整数値をランダムに設定. この初期値は各実験で等しい値を用いた.
- 基準値 \mathbf{x}_0 : $(\sum_{v \in V} x^v[0]/|V|)\mathbf{1}$ とする. これは条件式 (5,6) を満たしている.
- $k_{1I}^{vv'} = k_{1O}^{vv'} = k_1^*$ ($v, v' \in V, v' \in N_v$)
- $k_{2I}^{vv'} = k_{2O}^{vv'} = 0.3$ ($v, v' \in V, v' \in N_v$)
- 自転車の出入り台数 $d_I^v[n], d_O^v[n]$: $d_I^v[n] = d_O^v[n] = d^v[n]$ が各 $v \in V, n$ について 1 から 3 の整数値をランダムにとる

k_1^* は $0.5/N_{\max}, 1.0/N_{\max}$ の 2 値を用いた. また, 上記の方法で用意した初期値は $\sum_{v \in V} x^v[0] = 99$ となった. この時, 基準値 $\mathbf{x}_0 = 4.95 \times \mathbf{1}$ である.

数値実験の結果, 各ポートの駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ と駐輪台数の時間変化を Fig.3, 基準値に対する誤差の二乗和 $\|\tilde{\mathbf{x}}[n]\|_2^2$ の時間変化を Fig.4 に示した.

ランダムに設定された初期値 $\mathbf{x}[0]$ に対し, 駐輪台数 $\mathbf{x}[n]$ が基準値 4.95 付近に集まっている様子が見取れる. また, ゲインの大きさの観点で結果を考察すると, ゲインが大きい時は初期値から基準値付近におおよそ集まるまでの時間が短くなっている一方, その後の振幅が比較的大きくなっていることが読み取れる.

以上の結果より, 本実験で提案した制御則の有効性が具体的な状況において確かめることができた. また, その際に設定するゲインを大きくすると, 偏っていた駐輪台数が基準値付近まである程度変化する時間を短くする一方, その後の振幅を大きくしうることが数値実験からわかった.

5 まとめ

本論文では, シェアバイクシステムにおける駐輪台数の偏りの問題に対し, ユーザーへのインセンティブの大きさがユーザーの行動の確率に対応しているという仮定の下でモデル化し, 制御則の提案と安定性に関する性質を示した. 各章について, その内容を以下にまとめる.

第 2 章では, シェアバイクシステムのモデル化を行った. ポートのネットワークを定義し, ユーザーに提案するインセンティブの大きさがユーザーの挙動に関する確率の大きさに対応するという枠組みのもと, 各ポートのダイナミクスに関してのモデルを設計した.

第 3 章では, 設計したモデルに対し制御則を提案した. また, 各ポート, 各クロックに出入りする自転車の台数が全て等しいという仮定の下, quantized consensus algorithm と対応づけを考えることで, 離散コンセンサス状態でない限り, 十分小さいゲインを適切にとれば, 駐輪台数の基準値に対する誤差の二乗和は (あるタイムスパンを見た時) に期待値として小さくなることを示した.

第 4 章では, 各モデルに対し, 一定条件下において

提案制御則の有効性，またゲインの設定と駐輪台数変化の挙動に関する性質を数値実験により確かめた。

最後に展望をまとめる．第3章で示した安定性に関する性質について，現状その性質を保証できる条件が保守的なものとなっており，より非保守的な条件や制御則の提案が今後の課題である．また，本稿では基本的な状況として自転車の出入り台数が等しい場合における安定性に関する性質を示したが，より一般的な状況における安定性に関する性質の導出に取り組んでいきたい。

参考文献

- 1) Elliot Fishman. Bikeshare: A review of recent literature. *Transport Reviews*, Vol. 36, No. 1, pp. 92–113, 2016.
- 2) Akshay Kashyap, Tamer Başar, and Rayadurgam Srikant. Quantized consensus. *Automatica*, Vol. 43, No. 7, pp. 1192–1203, 2007.
- 3) Reza Olfati-Saber, J Alex Fax, and Richard M Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 95, No. 1, pp. 215–233, 2007.
- 4) Reza Olfati-Saber and Richard M Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 49, No. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- 5) Thomas Preisler, Tim Dethlefs, and Wolfgang Renz. Self-organizing redistribution of bicycles in a bike-sharing system based on decentralized control. In *2016 Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS)*, pp. 1471–1480. IEEE, 2016.
- 6) Adish Singla, Marco Santoni, Gábor Bartók, Pratik Mukerji, Moritz Meenen, and Andreas Krause. Incentivizing users for balancing bike sharing systems. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 29, 2015.
- 7) Koji Tsumura, Binh Minh Nguyen, Hisaya Wakayama, Yoshiharu Maeno, and Shinji Hara. Distributed control of stochastic manufacturing processes based on consensus algorithms. In *2019 American Control Conference (ACC)*, pp. 573–578, 2019.